



# Międzynarodowy Konkurs Matematyczny KANGUR 2019

## Student

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

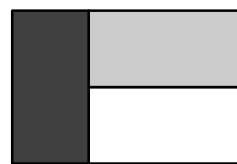
Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!



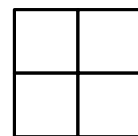
### Pytania po 3 punkty

1. Flaga Kangurlandii ma kształt prostokąta złożonego z trzech mniejszych prostokątów o identycznych wymiarach (patrz rysunek). Jaki jest stosunek długości boków białego prostokąta?



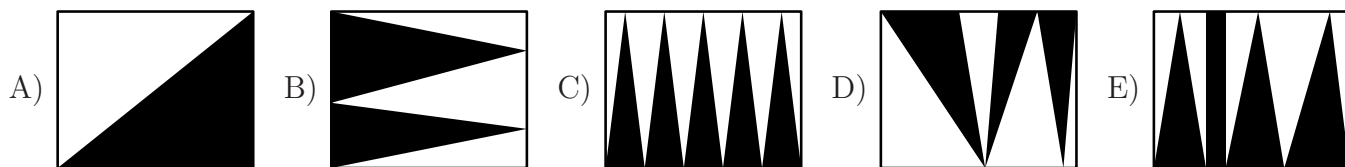
- A) 1 : 2      B) 2 : 3      C) 2 : 5      D) 3 : 7      E) 4 : 9

2. Adam wpisał liczby 1, 2, 3 i 4 do różnych kratek kwadratowej tablicy o rozmiarach  $2 \times 2$  i obliczył sumy w wierszach i kolumnach. Dwie z tych sum to 4 i 5. Jakie są dwie pozostałe sumy?



- A) 6 i 6      B) 3 i 5      C) 4 i 5      D) 4 i 6      E) 5 i 6

3. Na pięć różnych sposobów zacieniowano część pewnego prostokąta. Na którym rysunku zacieniowana część ma największe pole?



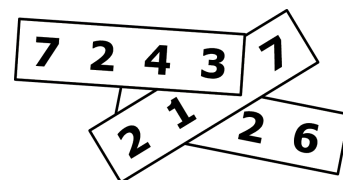
4. Która z poniższych liczb jest równa liczbie  $\sqrt{2^{0,75}}$ ?

- A)  $4^{0,75}$       B)  $\sqrt[4]{4}$       C)  $\sqrt[8]{8}$       D)  $2^{0,25}$       E)  $2^{1,5}$

5. Ile krawędzi ma ostrosłup o 23 ścianach bocznych?

- A) 23      B) 24      C) 46      D) 48      E) 69

6. Na każdym z trzech pasków papieru zapisano po jednej liczbie czterocyfrowej, a następnie paski ułożono jak na rysunku, zakrywając trzy cyfry. Jakie cyfry zostały zakryte, jeśli suma tych trzech liczb wynosi 11126?

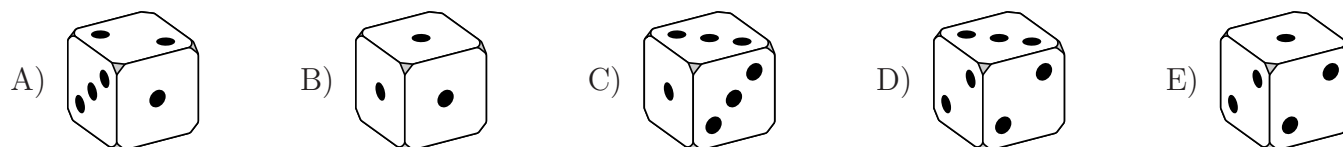


- A) 1, 4 i 7      B) 1, 5 i 7      C) 3, 3 i 3      D) 4, 5 i 6      E) 4, 5 i 7

7. Niech  $N$  będzie najmniejszą liczbą naturalną o sumie cyfr równej 2019. Jaka jest pierwsza od lewej cyfra liczby  $N$ ?

- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

8. Na każdej ze ścian pewnej symetrycznej kostki sześciennej widnieje jedno, dwa albo trzy oczka. Który z poniższych rysunków nie przedstawia tej kostki, jeżeli wiadomo, że w jednokrotnym rzucie tą kostką prawdopodobieństwo wyrzucenia jednego, dwóch i trzech oczek jest równe odpowiednio  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{1}{6}$ ?



9. Michał zdefiniował nową operację na liczbach rzeczywistych wzorem  $x \diamond y = y - x$ . Jeśli dla pewnych liczb  $a$ ,  $b$  i  $c$  zachodzi równość  $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ , to która z poniższych zależności musi dla nich zachodzić?

- A)  $a = b$                       B)  $b = c$                       C)  $a = c$                       D)  $a = 0$                       E)  $c = 0$

10. Ile spośród liczb od  $2^{10}$  do  $2^{13}$  włącznie jest podzielnych przez  $2^{10}$ ?

- A) 2                      B) 4                      C) 6                      D) 8                      E) 16

### Pytania po 4 punkty

11. Największą potęgą liczby 3 dzielącą  $7! + 8! + 9!$  jest

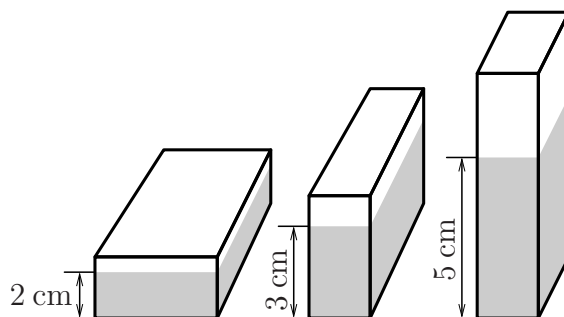
- A)  $3^2$ .                      B)  $3^3$ .                      C)  $3^4$ .                      D)  $3^5$ .                      E)  $3^6$ .

12. W tym roku szkolnym liczba dziewcząt w naszej klasie wzrosła o 20%, a liczba chłopców zmniejszyła się o 20%. W rezultacie łączna liczba uczniów w klasie zwiększyła się o 1. Która z poniższych liczb może być aktualną liczbą uczniów w naszej klasie?

- A) 22                      B) 26                      C) 29                      D) 31                      E) 34

13. Prostopadłościenny pojemnik zawiera  $120 \text{ cm}^3$  wody. W zależności od tego, którą ścianę pojemnika ustawimy poziomo, wysokość słupa wody w pojemniku jest równa 2, 3 lub 5 centymetrów (patrz rysunek – proporcje na rysunku nie zostały zachowane). Jaka jest objętość pojemnika?

- A)  $160 \text{ cm}^3$                       B)  $180 \text{ cm}^3$                       C)  $200 \text{ cm}^3$   
D)  $220 \text{ cm}^3$                       E)  $240 \text{ cm}^3$

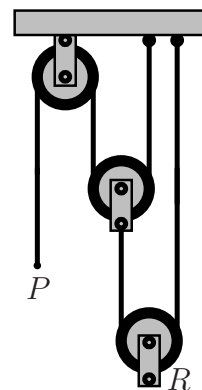


14. Trójka dziwaków – Adam, Bronek i Cezary – wychodzi codziennie na spacer. Jeśli Adam nie nakłada kapelusza, to Bronek wychodzi w kapeluszu. Jeśli Bronek nie wychodzi w kapeluszu, to Cezary nakłada kapelusz. Dzisiaj Cezary nie nałożył kapelusza. Kto z całą pewnością wyszedł dzisiaj w kapeluszu?

- A) Tylko Adam i Bronek.                      B) Tylko Adam.                      C) Adam, Bronek i Cezary.  
D) Ani Adam, ani Bronek.                      E) Tylko Bronek.

15. W systemie krążków linowych na rysunku wszystkie odcinki lin pomiędzy krążkami są pionowe. Jeśli koniec  $P$  liny opuścimy o 24 cm, to o ile centymetrów uniesie się punkt  $R$ ?

- A) 24                      B) 12                      C) 8                      D) 6                      E)  $\frac{24}{5}$



16. Dodatnią liczbę całkowitą  $n$  nazywamy *liczbą układną*, jeśli jej największym dzielnikiem mniejszym od  $n$  jest  $n - 6$ . Ile jest liczb układnych?

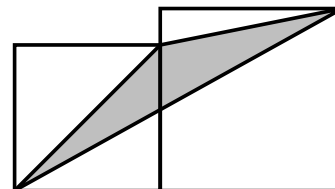
- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 6                      E) Nieskończenie wiele.

17. Ze zbioru wierzchołków pewnego wielokąta wypukłego wybieramy losowo dwa punkty. Prawdopodobieństwo, że wybrane punkty są końcami pewnej przekątnej tego wielokąta, wynosi 0,8. Ile boków ma wielokąt?

- A) 8                      B) 9                      C) 10                      D) 11                      E) 2019

18. Rysunek przedstawia dwa przylegające kwadraty o bokach długości  $a$  i  $b$ , gdzie  $a < b$ . Czemu jest równe pole zaciętego trójkąta?

- A)  $\sqrt{ab}$     B)  $\frac{1}{2}a^2$     C)  $\frac{1}{2}b^2$     D)  $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$     E)  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$



19. Część całkowita liczby  $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}}$  jest równa

- A) 4.                      B) 5.                      C) 6.                      D) 20.                      E) 25.

20. Kazik miał dla pewnych liczb całkowitych dodatnich  $a$ ,  $b$  i  $c$  obliczyć za pomocą kalkulatora wartość wyrażenia  $\frac{a+b}{c}$ . Wprowadził po kolei liczbę  $a$ , znak  $+$ , liczbę  $b$ , znak dzielenia  $\div$  i liczbę  $c$ , otrzymując w wyniku 11. Następnie zmienił kolejność, wprowadzając  $b$ ,  $+$ ,  $a$ ,  $\div$  i  $c$ . Ku swojemu zdumieniu otrzymał tym razem wynik 14. Kazik domyślił się, że kalkulator uwzględnia kolejność działań. Jaka jest poprawna wartość  $\frac{a+b}{c}$ ?

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

### Pytania po 5 punktów

21. Dla ilu liczb całkowitych  $n$  liczba  $|n^2 - 2n - 3|$  jest pierwsza?

- A) Dla 1.                      B) Dla 2.                      C) Dla 3.                      D) Dla 4.                      E) Dla nieskończenie wielu.

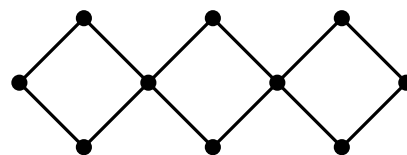
22. Niech  $a$  będzie sumą wszystkich dodatnich dzielników liczby 1024 i niech  $b$  będzie ich iloczynem. Wówczas

- A)  $(a - 1)^5 = b$ .                      B)  $(a + 1)^5 = b$ .                      C)  $a^5 = b$ .                      D)  $a^5 - 1 = b$ .                      E)  $a^5 + 1 = b$ .

23. Jaki jest zbiór wszystkich wartości parametru  $a$ , dla których równanie  $2 - |x| = ax$  ma dokładnie dwa rozwiązania?

- A)  $(-\infty, -1)$                       B)  $(-1, 1)$                       C)  $\langle 1, +\infty$                       D)  $\{0\}$                       E)  $\{-1, 1\}$

24. Dziesięć punktów połączono jak na rysunku. Chcemy ponumerować je liczbami od 1 do 10 w taki sposób, by suma numerów w wierzchołkach każdego z trzech kwadratów była taka sama. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość tej sumy?



- A) 18      B) 19      C) 20      D) 21      E) 22

25. Ile różnych płaszczyzn przechodzi przez co najmniej trzy wierzchołki ustalonego sześciangu?

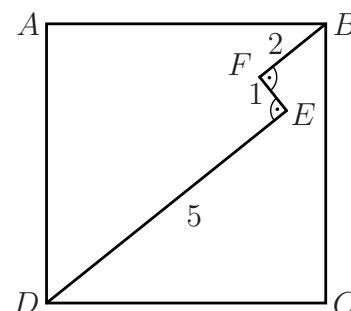
- A) 6      B) 8      C) 12      D) 16      E) 20

26. Cztery różne proste przechodzące przez początek układu współrzędnych przecinają parabolę  $y = x^2 - 2$  w ośmiu punktach. Czemu może być równy iloczyn odciętych (tj. współrzędnych „iksowych”) tych ośmiu punktów?

- A) Tylko 16.      B) Tylko  $-16$ .      C) Tylko 8.      D) Tylko  $-8$ .  
E) Iloczyn może przyjmować różne wartości.

27. Łamana  $DEFB$  łączy przeciwległe wierzchołki kwadratu  $ABCD$ , przy czym  $DE \perp EF$  i  $EF \perp FB$  (patrz rysunek). Jaka jest długość boku kwadratu, jeśli  $|DE| = 5$ ,  $|EF| = 1$  i  $|FB| = 2$ ?

- A)  $3\sqrt{2}$       B)  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$       C)  $\frac{11}{2}$       D)  $5\sqrt{2}$       E) Inna.



28. W ciągu  $a_1, a_2, a_3, \dots$  mamy  $a_1 = 49$ , natomiast dla  $n \geq 1$  wyraz  $a_{n+1}$  jest kwadratem liczby otrzymanej przez powiększenie sumy cyfr liczby  $a_n$  o 1. W szczególności  $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 196$ . Ile wynosi  $a_{2019}$ ?

- A) 25      B) 49      C) 64      D) 121      E) 400

29. Ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  wybieramy losowo trzy liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jedna z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych?

- A)  $\frac{1}{10}$       B)  $\frac{1}{6}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{1}{2}$

30. Pola diagramu pokazanego na rysunku wypełniamy liczbami od 1 do 5 w taki sposób, że w żadnym wierszu ani w żadnej kolumnie liczby nie powtarzają się i że sumy liczb w trzech obszarach zakreślonych pogrubionymi liniami są identyczne. Jaka liczba znajdzie się w polu oznaczonym znakiem zapytania?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

